

TILLERING: LA RASTREMAZIONE DEI BRACCI

Analisi delle implicazioni che hanno dato forma all'arco tradizionale

di Mario Attilio Ostdich

(Testo pubblicato in Outlab nel marzo 2011)

L'arco **diritto** "storico" – quello fatto con un'unica asta di legno rettilinea e rastremata – è il prodotto eccellente di un'esperienza plurimillenaria. La sua forma semplice nasconde una tecnologia complessa. Analizzarla, utilizzando gli strumenti del pensiero scientifico, è un'impresa "sportiva" della mente. Per compierla non è necessario essere ingegneri. Bastano alcune delle nozioni di fisica che dovrebbero fare parte della cultura media. Tra queste vi è l'uso corretto delle unità di misura tecniche: **metro** (m), **secondo** (s), **chilogrammo massa** (kg), **newton** ($N=kg \cdot m/s^2$), **joule** ($J=N \cdot m$), **watt** ($W=J/s$), **pascal** ($Pa=kg/m^2$).

LA SOLLECITAZIONE A FLESSIONE

Iniziamo esaminando le implicazioni che regolano il comportamento elastico dei materiali sottoposti a **flessione**.

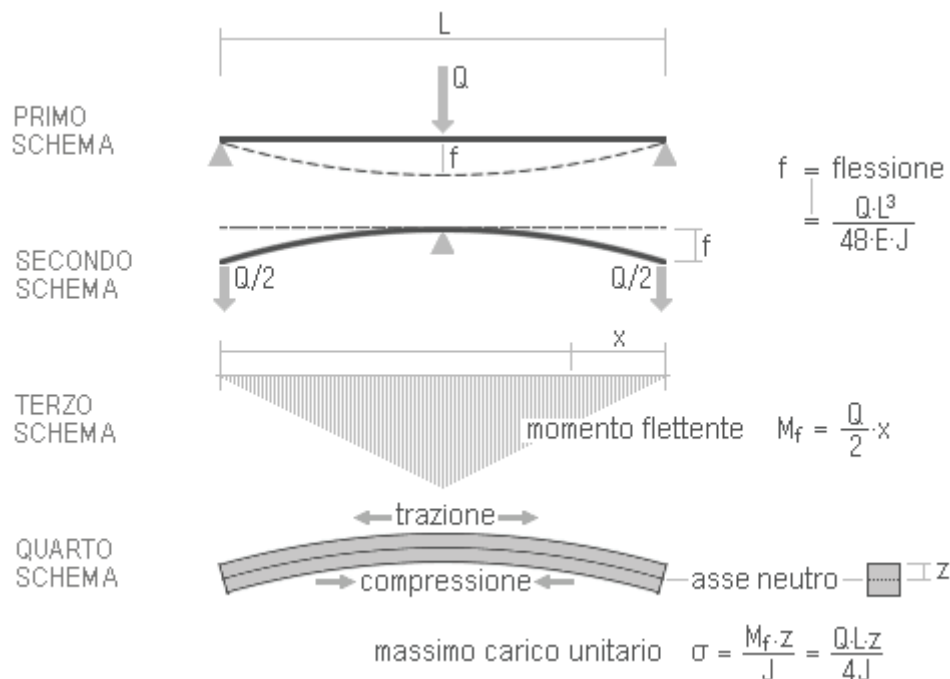


Fig.1 – Parametri e calcoli della sollecitazione a flessione

Il primo schema della Fig.1 mostra un'asta appoggiata agli estremi, con un carico collocato al centro della sua lunghezza. In linguaggio corrente si dice che l'asta, in queste condizioni, flette ad **arco**. Nei testi di meccanica l'abbassamento **f** è chiamato **freccia**. E' quindi evidente come gli "archi" e le "frecce", che sono oggetto di questo studio, siano radicati nella esperienza tecnica della flessibilità.

La formula che permette di calcolare l'**abbassamento f** (m) deriva da un ragionamento complesso che sarà esaminato in appendice. Per ora è sufficiente consultare un manuale per progettisti meccanici e sapere che:

$$f = Q \cdot L^3 / (48E \cdot J) \quad (1)$$

Questa stessa formula vale anche per il secondo schema della Fig.1 – simile ad un arco sottoposto a trazione – dove l'asta, appoggiata al centro, è soggetta ad un carico uguale a quello precedente, ma ripartito sulle due estremità. Dei quattro parametri richiesti, per calcolare **f**, due definiscono l'entità della sollecitazione:

Q **carico** (N)

L **lunghezza** (m), misurata come distanza tra i punti d'appoggio mentre gli altri due danno la misura della rigidità dall'asta:

J **momento d'inerzia** (m⁴), relativo alla rigidità espressa dalla forma

E **modulo elastico** (Pa), relativo alla rigidità espressa dal materiale.

Questi ultimi due parametri sono esaminati nei capitoli seguenti.

La sollecitazione a flessione non è uniformemente ripartita su tutta la lunghezza dell'asta. La nostra esperienza quotidiana ne dà conferma. Se vogliamo spezzare un'asta di legno con le nostre mani, piegandola contro il ginocchio ci aspettiamo che l'asta si rompa proprio sul punto di appoggio, dove maggiore è il braccio di leva **x** con cui il carico agisce. Questa sollecitazione, descritta dal terzo schema della Fig.1, è il **momento flettente M_f** (N·m).

$$M_f = Q \cdot x / 2 \quad \text{e quindi} \quad M_{\max} = Q \cdot L / 4 \quad (2)$$

L'ultimo schema della Fig.1 mette in evidenza come la condizione di flessione comporta la capacità di resistere al carico di **trazione** e **compressione** indotto dalla deformazione. Il massimo **carico unitario σ** (Pa) si manifesta nella porzione dello strato posto alla **massima distanza z** dall'asse neutro ed inoltre sta nella zona dove maggiore è il momento flettente. Affinché l'asta regga occorre che in quel punto **σ** sia inferiore al **carico limite R_p** oltre il quale il materiale subisce danni permanenti. Questa è la formula da utilizzare per calcolare il carico unitario:

$$\sigma = M_f \cdot z / J = Q \cdot L \cdot z / (4J) \quad \text{purché} \quad \sigma < R_p \quad (3)$$

LA RIGIDITA' DI FORMA

La rigidità di forma di un'asta dipende dal disegno della sezione in rapporto al suo orientamento rispetto all'asse neutro. Il **momento d'inerzia "assiale"** è il parametro che esprime questa rigidità di forma, tenendo conto del fatto che ogni elemento **δ_S** della sezione contribuisce in proporzione al quadrato della sua distanza **z_S** dall'asse neutro. La Fig.2 mostra come il momento d'inerzia di una sezione quadrata, con dieci millimetri di lato, possa essere calcolato sommando il contributo generato da cento elementi che hanno sezione di 1 mm²:

$$J = \sum \delta_S \cdot z_S^2 \quad (4)$$
$$J \approx 2 \cdot 10 \cdot (4,5^2 + 3,5^2 + 2,5^2 + 1,5^2 + 0,5^2) = 825 \text{ mm}^4$$

Questo è un calcolo approssimato. La misura esatta, 833 mm⁴, può essere ottenuta aumentando la suddivisione degli elementi, oppure utilizzando una delle formule che si trovano su un qualunque manuale di meccanica. Queste formule sono trascritte nella Fig.2 mettendo a confronto profili che hanno momenti d'inerzia quasi uguali pur avendo sezioni con area **S** molto differente.

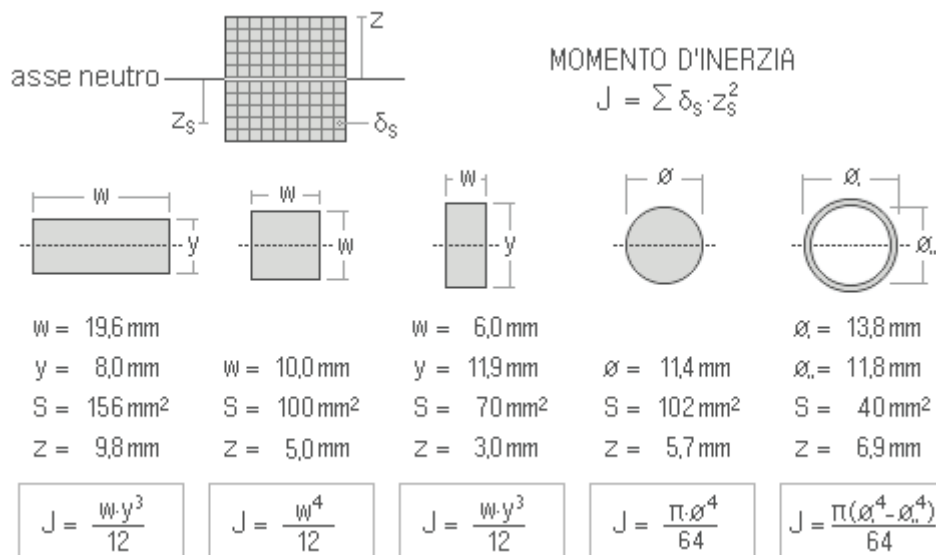


Fig.2 – Profili con momenti d'inerzia equivalenti ($J \approx 830 \text{ mm}^4$)

Volendo ridurre al massimo la massa dell'asta, la forma ottimale è quella di un tubo, così come sono tubolari le aste delle frecce. Una sezione rettangolare con l'altezza molto maggiore della base ha un momento d'inerzia elevato ma è instabile, essendo soggetta a rovesciarsi. Una sezione tonda ha il vantaggio d'avere sempre lo stesso momento d'inerzia qualunque sia l'orientamento della flessione.

Il **momento d'inerzia** è indicato con **J** (da non confondere con il simbolo del joule). La sua misura è qui espressa in mm², ma deve essere convertita in m⁴ quando è inserita in una formula. Il rapporto **J/z** è spesso indicato come parametro a sé stante, ed è denominato **modulo di resistenza**. Nelle sezioni simmetriche **z** è uguale a **y/2**.

LA RIGIDITA' DEL MATERIALE

Per avere un'idea delle proprietà dei materiali usati in arcieria è utile confrontare le loro principali caratteristiche tecniche con quelle dell'acciaio da carpenteria.

proprietà simbolo (unità di misura)	densità ρ (kg/m ³)	carico limite R_p (MPa)	modulo elastico E (GPa)
acciaio	7800~7900	200~250	200~220
lega d'alluminio per frecce	2700~2800	300~450	72~73
frassino per archi	700~800	40~60	12~14
pino cembro per frecce	400~500	30~50	10~11
fibra di carbonio + resina	1500~1800	500~1000	200~300

La **densità** è il nome che oggi si preferisce dare a ciò una volta era chiamato "peso specifico". Il **carico limite**, o carico di snervamento, è quello "unitario" – cioè forza su unità di superficie – oltre il quale le deformazioni diventano permanenti. Il **modulo elastico** è la misura di rigidità, espressa in termini di rapporto tra il carico unitario applicato e la percentuale di **allungamento** elastico che ne deriva. Osservando come il modulo elastico sia commisurato alla **densità**, si può apprezzare l'eccezione rappresentata dalla fibra di carbonio che offre un modulo elastico superiore a quello dell'acciaio pur essendo cinque volte più leggera. Per valutare le misure espresse in **pascal (Pa)** è bene ricordare che un **megapascal (MPa)** equivale a un newton per millimetro quadrato e un **gigapascal (GPa)** equivale a 1000 MPa.

Ecco un esempio pratico: consideriamo una vergella d'acciaio che abbia un carico limite R_p di 220 MPa (cioè 220 N/mm²), un modulo elastico E di 200GPa (cioè 200·10⁹ N/m²) e una sezione S di 5 mm² (cioè 0,005 m²). Se a questa vergella venisse appeso un carico Q di 100 kg (cioè 981 N), il carico unitario σ che ne deriva sarebbe $Q/S = 196$ N/mm², abbastanza prossimo al carico limite, ma ancora sostenibile senza danni. Con quel carico l'allungamento elastico è $\sigma/E = 0,04$ %. La maggior parte dei materiali hanno un allungamento *elastico* molto limitato. Allungamenti maggiori sono quelli *plastici*, causati dal cedimento che permane anche dopo aver tolto il carico.

Riassumiamo ora quanto è stato detto, prendendo nota dei punti principali.

- A parità di **carico**, la flessione diminuisce se si riduce la **lunghezza** dell'asta o si aumenta il **momento d'inerzia** della sezione e il **modulo elastico** del materiale.
- Ogni sezione di un'asta rastremata è soggetta ad una **curvatura** che dipende dal rapporto M_f/J esistente in quel punto.
- La **massima flessione** ammissibile è determinata dal rapporto $M_f \cdot z/J$ che misura la sollecitazione subita dallo strato più lontano dall'**asse neutro**.
- La **rigidità** espressa da un sezione più grossa e la **flessibilità** ammessa da una sezione più piccola sono due aspetti complementari della resistenza di un'asta.
- Il raddoppio dello **spessore y** aumenta il momento d'inerzia otto volte di più di quanto avverrebbe raddoppiando la **larghezza w**.
- Per i profili simmetrici la **distanza z** è uguale alla metà dello spessore.

LA RASTREMAZIONE DEI BRACCI DI UN ARCO

Le argomentazioni che abbiamo trattato sono ora sufficienti per affrontare il tema cruciale della **rastremazione** dei bracci di un arco. Questa è l'arte che qualifica il lavoro di un buon costruttore di archi.

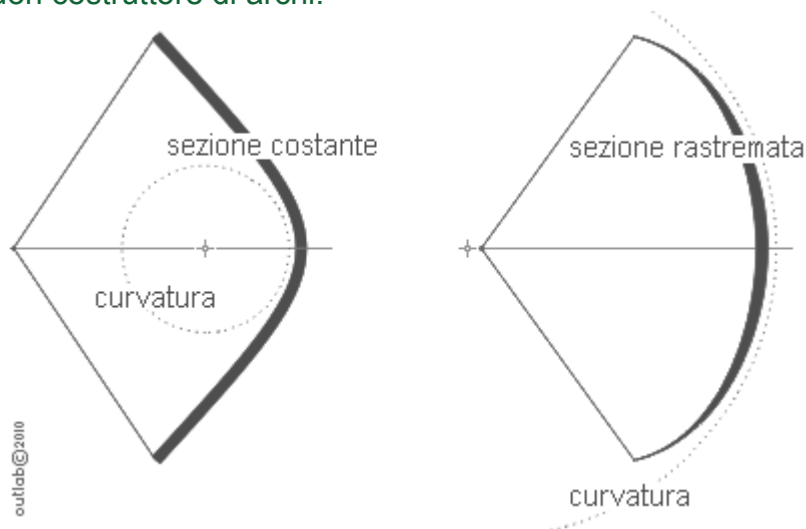


Fig.3 – Curvatura dell'arco e rastremazione dei bracci

La Fig.4 mostra come l'arco a sezione costante, rappresentato a sinistra, sia destinato a rompersi nella parte centrale a causa del raggio di **curvatura** troppo stretto, mentre quello rastremato, a destra, è meno sollecitato avendo un raggio di curvatura tre volte maggiore. La figura mette anche in evidenza come la curvatura possa essere persino aumentata all'estremità, dove il minore spessore dei bracci consente una maggiore flessibilità.

L'esperienza pratica suggerisce però di non esasperare la rastremazione nella parte terminale dei bracci, per evitare di compromettere la stabilità all'arco. E' quindi preferibile una curvatura uniforme, garantita da un valore costante del rapporto M_f/J . La Fig.5 mostra come questo principio trova applicazione nei due casi più significativi: una **sezione rotonda**, tipica degli antichi archi di legno, e una **sezione rettangolare** a spessore costante, come quella dei moderni flettenti di resina.

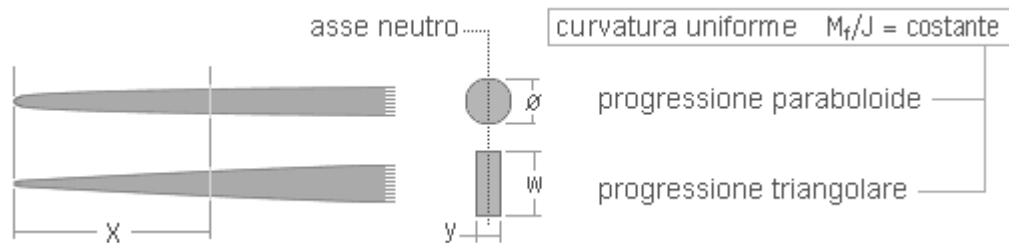


Fig.4 – Rastremazione per una curvatura uniforme

▪ sezione tonda	diametro variabile	ϕ
	massima distanza	$z = \phi / 2$
	momento d'inerzia	$J = \pi \cdot \phi^4 / 64$
	modulo di resistenza	$J / z = \pi \cdot \phi^3 / 32$
	condizione di uniformità	$M_f / J = x / \phi^4 = \text{costante}$
▪ sezione rettangolare	spessore costante	y
	larghezza variabile	w
	massima distanza	$z = y / 2$
	momento d'inerzia	$J = w \cdot y^3 / 12$
	modulo di resistenza	$J / z = w \cdot y^2 / 6$
	condizione di uniformità	$M_f / J = x / w = \text{costante}$

Come prima analisi si può concludere che la curvatura uniforme di una **sezione tonda** richiede una riduzione progressiva tale che x/ϕ^4 resti costante. Questa è una progressione "paraboloide", lenta all'inizio e più rapida verso l'estremità. Per le **sezioni rettangolari** a spessore costante, la rastremazione richiesta è quella che mantiene costante il rapporto x/w , ottenendo così una progressione "triangolare". Per entrambi le sezioni vale il principio che M_f/J sia costante.

Volendo essere **più precisi**, dobbiamo però tenere conto che le formule che abbiamo finora utilizzato, riprese dai testi di meccanica, si riferiscono a carichi perpendicolari e a flessioni limitate, che non cambiano di molto l'assetto dell'asta, mentre quello di un arco teso è abbondantemente alterato, complicando il reticolo delle forze in atto. Prima di affrontare questo secondo livello di analisi è utile ricordare alcuni concetti fondamentali del **calcolo vettoriale** di cui avremo bisogno.

FORZE E VETTORI

Un chilogrammo-massa è una quantità di materia che è sempre la stessa, ovunque essa sia. Il suo peso, invece dipende dall'**accelerazione di gravità** a cui è sottoposto. Peso-massa e peso-forza sono correlati tra loro. Nella pratica quotidiana le due cose si confondono, ma per fare un calcolo appena un po' complesso occorre avere ben chiaro che una **forza** è il prodotto di una **massa** per una **accelerazione**:

$$F = m \cdot a$$

$$1 \text{ newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$$

La massa **m** è una **grandezza scalare**, definita solo dalla sua misura, mentre la forza **F** è una **grandezza vettoriale**, definita dalla sua **intensità** e dalla **direzione** su cui agisce. Quindi, la somma di due vettori – due forze, due spostamenti, due velocità – è un risultato che richiede calcoli come quelli descritti dalla Fig.5, per i quali è necessaria una sufficiente familiarità con la **trigonometria**:

$$r = (v^2 + u^2 + 2v \cdot u \cdot \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\theta = \arctg [v \cdot \sin \varphi / (u + v \cdot \cos \varphi)] \quad (6)$$

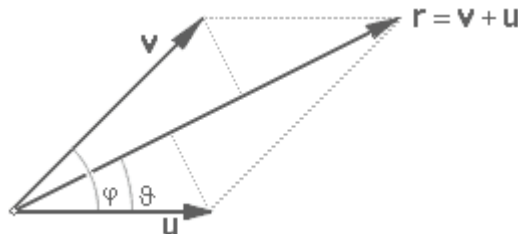


Fig.5 – Somma di due forze

Questa non è una competenza che si apprende rapidamente, ma per cogliere il significato delle formule possono bastare alcuni riferimenti elementari, cominciando dalle convenzioni, qui riassunte nella Fig.6:

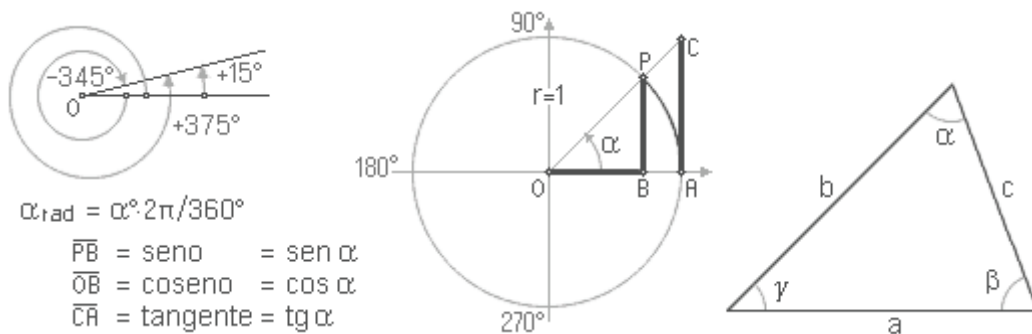


Fig.6 – Convenzioni fondamentali del calcolo trigonometrico

- Gli **angoli** si misurano in senso antiorario e possono essere maggiori dell'angolo giro per cui $+15^{\circ}$, -345° e $+375^{\circ}$ sono misure equivalenti.
- Per semplificare i calcoli è utile esprimere la misura degli angoli in **radianti (rad)**, per cui 1 rad, cioè $360^{\circ}/2\pi = 57,3^{\circ}$, racchiude un arco lungo quanto il raggio.
- Le funzioni "seno", "coseno" e "tangente" tracciate su un cerchio di raggio unitario, definiscono i rapporti proporzionali esistenti tra gli **elementi di un triangolo**.
- Le funzioni trigonometriche di un angolo α sono indicate con **sen α** , **cos α** , **tg α** , le funzioni inverse che danno la misura di α sono **arcsen**, **arccos**, **arctg**.

Seno, coseno e raggio unitario compongono un triangolo rettangolo, con ipotenusa uguale a 1, dal quale possiamo ricavare le prime relazioni fondamentali

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (7)$$

$$\sin \alpha / \cos \alpha = \text{tg } \alpha \quad (8)$$

da cui derivano i teoremi che definiscono rapporti più complessi come:

$$a / \sin \alpha = b / \sin \beta = c / \sin \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad (9)$$

Un tema rilevante del calcolo vettoriale riguarda i **momenti** di cui ci siamo già occupati parlando del momento flettente definito dalla formula (2). Questi sono costituiti da forze che sono applicate ad un corpo dotato di un proprio **vincolo**, con la conseguenza di generare una rotazione, o torsione o flessione, che dipende dalla intensità del vettore e dalla lunghezza braccio con cui il vettore agisce.

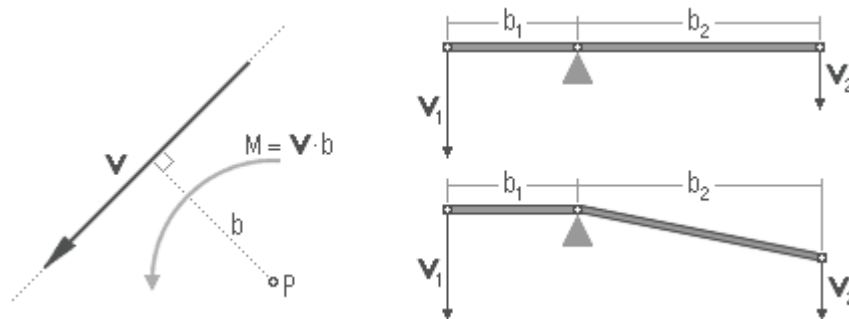


Fig.7 – L'azione svolta da vettori e momenti

Il primo schema della Fig.7 mostra un vettore v che ha braccio b rispetto all'asse di rotazione costituito dal vincolo P . Il suo **momento** ha valore:

$$M = v \cdot b$$

Per capire il significato di questa misura basta pensare alla leva, o ad un bilanciere che resta in equilibrio se è soggetto a due momenti equivalenti e contrapposti:

$$v_1 \cdot b_1 = v_2 \cdot b_2$$

E' da notare che i due bilancieri rappresentati nella Fig.7 sono equivalenti, nonostante la differenza di forma, poiché il braccio b_2 con cui agisce v_2 è lo stesso.

ASSETTO DI UN ARCO TESO

Con i riferimenti che abbiamo introdotto possiamo ora affrontare l'analisi del reticolo di forze presenti in un arco a fine trazione. Per semplificare i calcoli, la Fig.8 ipotizza una flessione uniforme ed un allungo netto h che sia uguale alla metà della lunghezza della corda, per cui $QQ = OE$ costituisce il raggio di curvatura dell'arco.

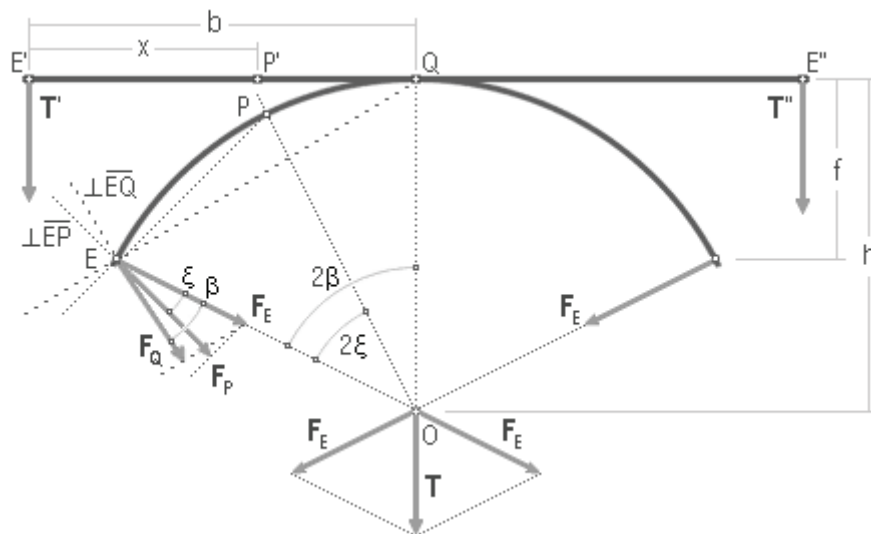


Fig.8 – Reticolo delle forze in un arco carico

Dal confronto di questo schema con quello proposto nella Fig.1 emergono due implicazioni di cui occorre tenere conto.

- La **corda** agisce come una leva. Infatti, l'abbassamento **f** è ottenuto da un allungo **h** che è molto maggiore. Con un angolo **2β** prossimo ai 60°, come normalmente accade a fine trazione, il carico raddoppia la sua azione generando due componenti **F_E** ciascuna delle quali ha una intensità analoga a quella di **T**. Per angoli minori la misura è persino maggiore.
- La rilevanza della **curvatura** comporta che il momento flettente rispetto ad un generico punto **P** debba essere calcolato tenendo conto del braccio d'azione **EP** e dalla componente **F_P** rilevata perpendicolarmente al braccio. Quanto più **P** si avvicina a **Q** tanto più **F_P** è minore di **F_E** e anche **EP** è minore della distanza **x** misurata sull'arco prima della flessione.

L'effetto leva della corda ha implicazioni nel calcolo del libbraggio di un arco. La divergenza dovuta alla curvatura fa invece decadere l'ipotesi introdotta dalla Fig.1 e dalla formula (2) che suggerivano una progressione costante del momento d'inerzia. Per ricalcolare la progressione, tenendo conto di questa divergenza, possiamo esprimere gli angoli in radianti ottenendo

$$2\beta = b / h \qquad 2\xi = x / h$$

da cui derivano le equazioni:

$$\begin{aligned}
 F_E &= T / (2\cos 2\beta) &= T / (2\cos(b/h)) \\
 F_P &= F_E \cdot \cos \xi &= T \cdot \cos(x/2h) / (2\cos(b/h)) \\
 EP &= 2h \cdot \sin \xi &= 2h \cdot \sin(x/2h) \\
 M_f &= F_P \cdot EP &= T \cdot h \cdot \sin(x/h) / (2\cos(b/h)) \\
 M_f / M_{max} &= J / J_{max} &= \sin(x/h) / \sin(b/h)
 \end{aligned} \tag{10}$$

Valutando che la corda di un longbow sia circa il 6% più corta dell'arco, si può considerare standard un rapporto $b/h=1,06$ e calcolare, con la formula (10), la progressione dei momenti d'inerzia che sono necessari per ottenere una **curvatura costante** su tutta la lunghezza dei bracci. La Fig.9 mostra lo scostamento dei dati corretti rispetto alla proporzionalità semplice rappresentata dalla retta tratteggiata. Ovviamente, il valore zero all'estremità del braccio non è praticabile nella realtà.

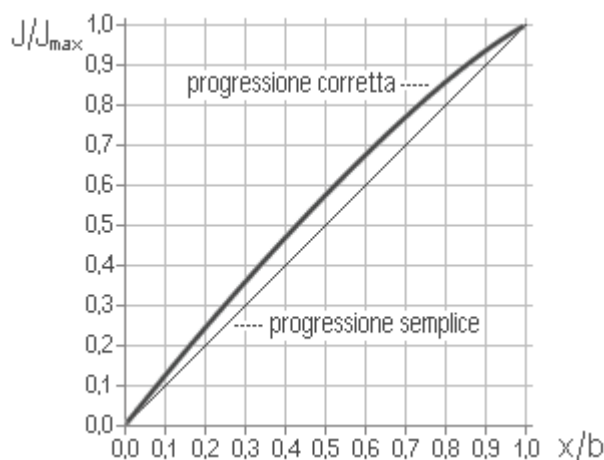


Fig.9 – Riferimenti per una curvatura uniforme

x / b	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
J / J_{max}	0%	12%	24%	36%	47%	58%	68%	77%	86%	94%	100%

IL CALCOLO DEL LIBBRAGGIO

Avendo a disposizione le analisi e le formule che abbiamo esaminato, non sembra difficile calcolare il **libbraggio** di un arco conoscendo le dimensioni e il materiale con cui è fatto. Il primo riferimento è dato dalla formula (1) che può essere così trascritta

$$Q = 48E \cdot J \cdot f / L^3 \quad (11)$$

Un esame più attento mette però in evidenza che il calcolo non è semplice, a causa delle molte variabili in gioco: la misura dell'effetto leva della corda, l'allungo, il profilo dei bracci, la dimensione dell'impugnatura, eccetera. Se vogliamo sperimentare un calcolo approssimato, possiamo introdurre alcune semplificazioni. Per esempio:

$Q \approx 2T$	effetto leva 2:1
$f \approx h / 2$	metà dell'allungo, come appare nella Fig.8
$L \approx L_a$	lunghezza netta, esclusa la parte rigida dell'impugnatura
E	modulo elastico del materiale utilizzato
$J \approx J_{med}$	valore medio dei momenti d'inerzia

Da queste ipotesi deriva la formula seguente, la cui malferma legittimità sarà successivamente sottoposta a verifica:

$$T \approx 8E \cdot J_{med} \cdot h / L_a^3 \quad (12)$$

VERIFICHE

Le analisi che abbiamo condotto in queste pagine possono apparire criticabili per il fatto d'essere contemporaneamente teoriche e affette da molte semplificazioni. E' quindi opportuno valutare la loro utilità mettendole a confronto con la realtà costituita da archi che rappresentano la competenza antica, quella artigianale moderna e gli standard dell'attuale produzione industriale.

Un arco di quattromila anni

Nel MUSEO EGIZIO di Torino sono custoditi sei archi e alcune aste da freccia, con punte in selce e metallo. Provengono da scavi condotti nell'Alto Egitto da una missione archeologica italiana, all'inizio del 1900. Una descrizione di questo materiale è presente in un testo di Franco Di Donato, pubblicato nel 1984.

L'arco che ora esaminiamo è il più lungo di quella collezione. Ha un profilo a doppia curva, come gli archi da caccia trovati nella tomba di Tutankhamon, caratterizzati da estremità curvate in direzione opposta a quella dei moderni archi ricurvi. E' fatto con un solo pezzo di legno di acacia, presumibilmente piegato, bagnando e passando sul fuoco le fibre destinate ad essere contratte. Gli archi di questo tipo hanno rendimenti e precisione ridotti, ma possono essere incordati agevolmente e per tempi lunghi, restando sempre pronti all'uso. Per questo erano preferiti dai cacciatori.

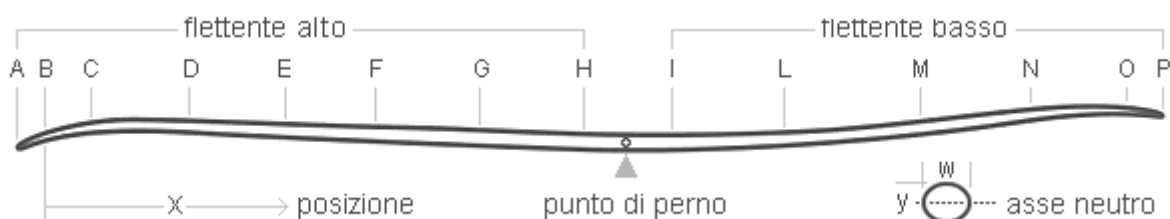


Fig.10 – Dimensioni dell'arco

Uno rilievo eseguito da Franco Carminati ha fornito le seguenti dimensioni:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P
x (m)	-0,03	0,00	0,08	0,23	0,38	0,52	0,68	0,84	0,97	1,15	1,36	1,53	1,67	1,73
w (mm)	0	10	14	18	21	24	25	26	26	25	21	18	10	0
y (mm)	0	8	13	17	19	22	23	24	24	23	19	16	10	0

In questo tipo di arco la corda è legata a qualche centimetro dall'estremità. I tratti **AB** e **OP** possono quindi essere trascurati. Le sezioni non sono esattamente tonde, ma lievemente schiacciate, con lo scopo di dare stabilità alla curvatura. Dalla sequenza delle dimensioni possiamo ipotizzare che il punto di perno dell'impugnatura sia collocato tra **H** e **I** con una asimmetria che è poco maggiore di quella abitualmente praticata negli archi moderni. Per il calcolo del momento d'inerzia utilizziamo la formula che i manuali di meccanica prescrivono per gli **ellissi**:

$$J = \pi \cdot w \cdot y^3 / 64 \quad (13)$$

La progressione dei momenti d'inerzia così calcolati è la seguente:

Flettente alto	B	C	D	E	F	G	H
J (mm ⁴)	251	1510	4341	7070	12544	14931	17643
Flettente basso	I	L	M	N	O		
J (mm ⁴)	17643	14931	7070	3619	491		
Valore medio	$J_{med} = 8504 \text{ mm}^4$						

Per una valutazione critica possiamo tracciare un diagramma che mette a confronto la progressione rilevata con quella teorica definita dalla formula (10).

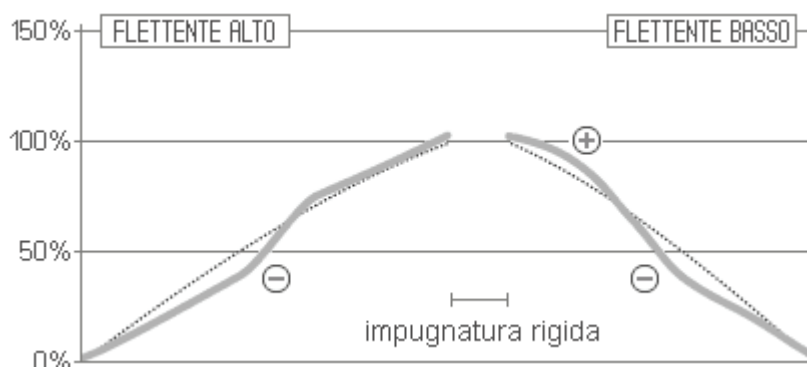


Fig.11 – Diagramma della rastremazione

Il criterio utilizzato nella Fig.11 è quello di rappresentare la curva dei valori rilevati esprimendoli come percentuale $J/(2J_{med})$. In questo modo è possibile attenuare gli scostamenti generati da sezioni che hanno progressione disomogenea.

Il diagramma mostra una sufficiente corrispondenza dei valori, pur manifestando qualche devianza segnalata dai segni "+" e "-". E' difficile dire se si tratta di errori involontari o di scelte volute e ragionevoli.

Per esprimere un giudizio su come la curvatura possa essere migliorata, o peggiorata, da questa irregolare **progressione** dei momenti d'inerzia, dovremmo sottoporre l'arco ad una prova di trazione che in questo caso è ovviamente impossibile. In alternativa potremmo ricorrere ad una procedura di simulazione computerizzata, come quelle che sono in uso negli uffici di progettazione più evoluti.

Per il livello hobbistico di questo testo può essere sufficiente una valutazione approssimata, da farsi graficamente, prima tracciando una curvatura uniforme del

profilo dell'arco allentato, e poi apportando correzioni che siano proporzionali agli scostamenti dei momenti d'inerzia. Da quanto appare dalla Fig.12 sembrerebbe che la rastremazione accentuata nella parte centrale dei bracci abbia il positivo effetto di arrotondare la curvatura, recuperando le retroversioni presenti nell'arco allentato.

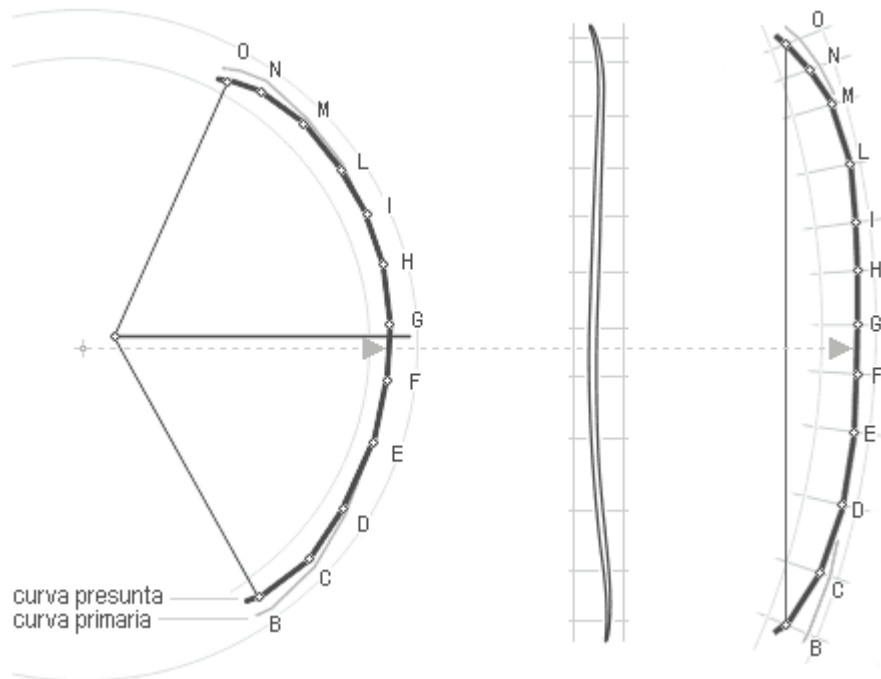


Fig.12 – Ipotesi di curvatura dell'arco

Per completare l'indagine resta la curiosità di conoscere il **libbraggio**. La formula (12) fornisce una misura di circa 44#. E' un dato che non possiamo verificare, ma sembra ragionevole.

Un arco "faidate"

Carlo Natati, nel suo bel libro "Archi e balestre nel Medioevo", racconta d'aver costruito il suo primo arco seguendo le istruzioni che un mensile per hobbisti degli anni '50 aveva ripreso dalla rivista americana POPULAR MECHANICS. Era stato fatto con due aste di legno incastrate all'impugnatura. Il libbraggio dichiarato è 40#. Il punto di perno è lievemente eccentrico. I bracci hanno quindi lunghezze diverse ma utilizzano la stessa sequenza di rastremazione.

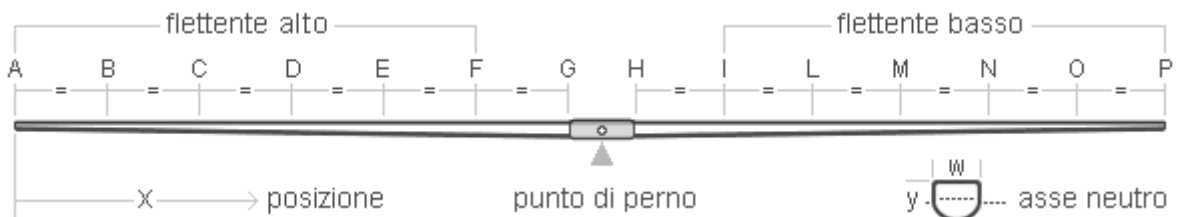


Fig.13 – Dimensioni dell'arco

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P
x (m)	0,00	0,14	0,29	0,43	0,58	0,72	0,87	0,97	1,11	1,25	1,39	1,52	1,66	1,80
w (mm)	12	15	20	22	25	25	27	27	25	25	22	20	15	12
y (mm)	11	12	15	17	20	22	25	25	22	20	17	15	12	11

La **sezione dei bracci** merita qualche commento. Negli archi antichi le sezioni erano perlopiù tonde, come la sezione naturale di un ramo. Poi, l'esperienza ha dimostrato

che una sezione più larga e piatta – in grado di ridurre le distanze dall'asse neutro – possa essere altrettanto rigida senza rischiare di rompersi. Però, la vera sfida per un costruttore di archi in legno sta nell'utilizzare al meglio la disomogeneità del materiale a disposizione. Lo strato superficiale, l'**alburno**, è elastico ed è quindi adatto per essere collocato sul dorso dell'arco, sollecitato a trazione. Il legno interno, il **durame**, è rigido e lavora meglio sulla faccia dell'arco, sollecitata a compressione. Questo è il motivo per cui gli archi di legno hanno spesso una sezione che non è né tonda né piatta, ma un ibrido – con il lato più curvo rivolto all'esterno, oppure all'interno, seguendo la conformazione dell'alburno. La levigatura finale segue poi i piani della venatura, per evitare discontinuità che possono innescare le fratture. Ogni arco ricavato da un solo pezzo di legno finisce così con l'avere una propria forma unica e irripetibile.

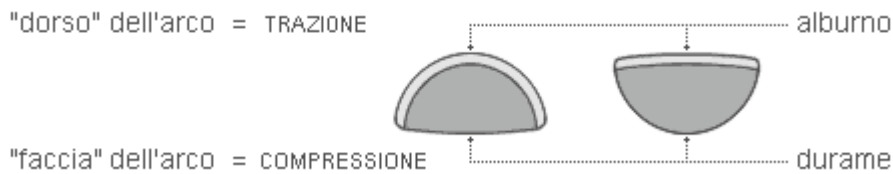


Fig.14 – La sezione dei bracci di un arco di legno

La forma delle sezioni dell'arco di cui ci stiamo occupando è quella disegnata a destra nella Fig.5. Il momento d'inerzia deve essere calcolato con una formula intermedia tra quelle prescritte per le sezioni quadre e per quelle tonde. Per una valutazione approssimata possiamo accettare di utilizzare

$$J = w \cdot y^3 / 16 \quad (14)$$

La progressione dei momenti d'inerzia così calcolati è la seguente:

Flettente alto	A	B	C	D	E	F	G
J (mm ⁴)	998	1620	4219	6755	12500	16638	(26367)
Flettente basso	H	I	L	M	N	O	P
J (mm ⁴)	(26367)	16638	12500	6755	4219	1620	998
Valore medio	$J_{med} = 7122 \text{ mm}^4$ (con esclusione dei dati tra parentesi)						

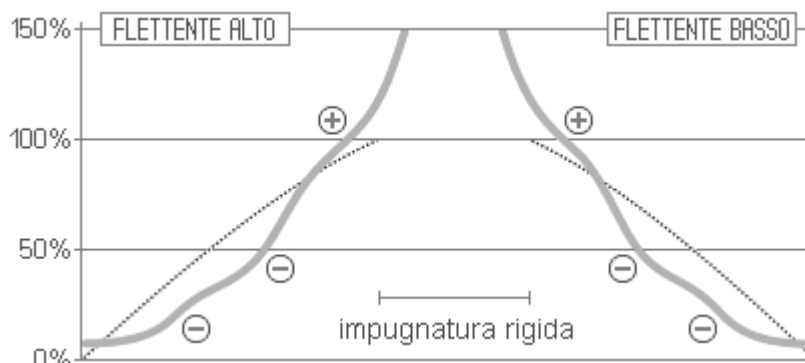


Fig.15 – Diagramma della rastremazione

Le posizioni **G** e **H** sono state escluse dal calcolo del valore medio perché hanno momenti d'inerzia elevati. La rigidità della impugnatura è quindi estesa da **F** a **I**. La Fig.15 che mette in evidenza una rastremazione alquanto diversa da quella che abbiamo giudicato teoricamente ottimale. Non abbiamo a disposizione verifiche sperimentali che permettano di dire che questa progressione sia scorretta, ma la tortuosità delle curve indica che sicuramente la sequenza non è armonica.

Il calcolo del **libbraggio** fornisce il risultato di 40#, uguale a quello indicato da Natati.

il Border Black Douglas

Per valutare la possibilità che le teorie che qui abbiamo sviluppato per gli archi dritti possano trovare applicazione anche per gli archi ricurvi, abbiamo esaminato la rastremazione di un arco tradizionale considerato tra i più prestigiosi. Quello a nostra disposizione è un modello da 50#, prodotto attorno al 1990, con bracci lamellari a sezione rettangolare, in vetroresina e legno.

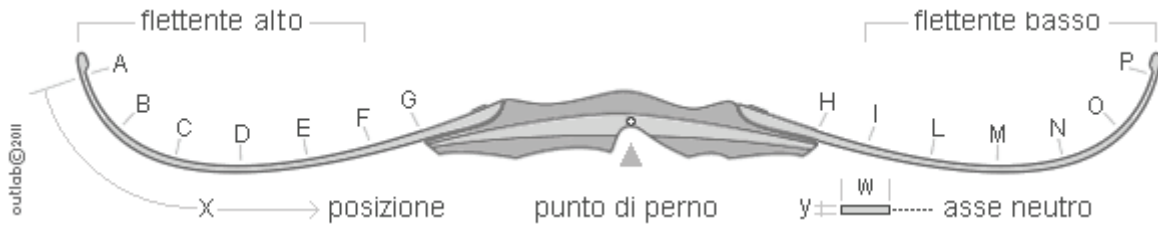


Fig.16 – Dimensioni dell'arco

A causa del profilo fortemente arcuato dei bracci allo stato allentato, le distanze dei punti di riferimento sono state misurate seguendo la curvatura. Anche in questo caso è stato deciso di considerare come elemento rigido dell'impugnatura anche gli intervalli **FG** e **HI** a causa del valore elevato del momento d'inerzia di **G** e **H**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P
x (m)	0,00	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,52	1,04	1,11	1,20	1,29	1,38	1,47	1,56
w (mm)	19,5	30,3	37,7	39,5	40,4	40,6	40,4	40,6	40,6	40,5	39,6	37,0	30,0	19,5
y (mm)	5,0	5,0	5,2	5,4	5,6	6,0	10,8	11,2	6,0	5,6	5,4	5,2	5,0	5,0

La progressione dei momenti d'inerzia è la seguente:

Flettente alto	A	B	C	D	E	F	G
J (mm ⁴)	203	316	442	518	591	731	(4241)
Flettente basso	H	I	L	M	N	O	P
J (mm ⁴)	(4753)	731	593	520	434	313	203
Valore medio	$J_{med} = 466 \text{ mm}^4$ (con esclusione dei dati tra parentesi)						

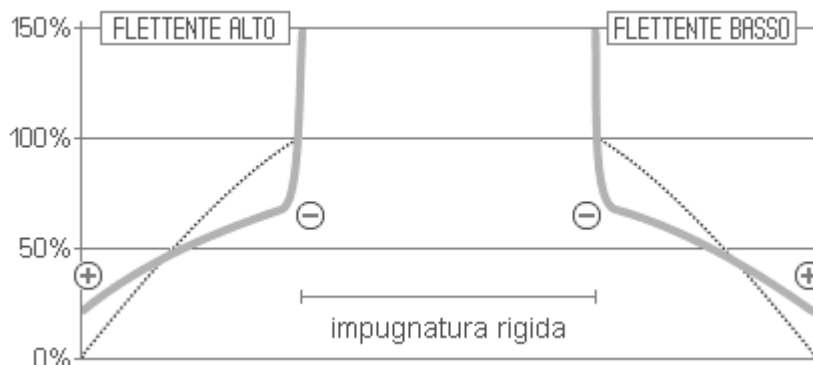


Fig.17 – Diagramma della rastremazione

I bracci hanno la medesima lunghezza, lo stesso profilo e anche la stessa sequenza di spessori. Le piccole differenze della larghezza non sono tali da far supporre che siano volute per differenziare la risposta dei bracci. Questa uniformità è messa in evidenza anche dal diagramma della Fig.17. Le curve sono simmetriche, con un andamento più breve rispetto a quello teorico, ma con una progressione molto simile. Verrebbe da dire che questo arco ha un'impugnatura fatta con una pregevole qualità artigianale, ma i suoi bracci sembrano fatti in serie, con la precisione e la standardizzazione che è tipica della produzione industriale.

Il calcolo del **libbraggio** fornisce un dato sbagliato: 63# contro 50# misurati con un dinamometro. Questo scostamento può dipendere da un errore di valutazione del modulo elastico del materiale composito con cui sono fatti i bracci, ma è anche vero che applicare ad un ricurvo le logiche studiate per un arco dritto è una forzatura eccessiva. Sarebbe invece interessante fare una analisi specifica valutando il libbraggio e l'energia accumulata come risultato dell'insieme dei momenti torcenti in cui può essere scomposta la sua azione. Questa ipotesi abbozzata nella Fig.18 potrebbe essere oggetto di uno studio a parte.

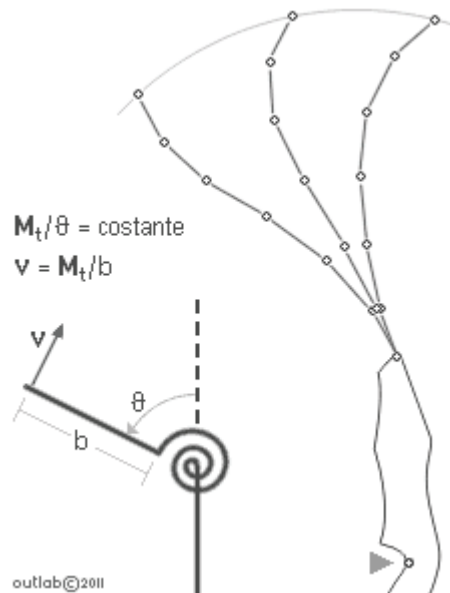


Fig.18 – Ipotesi di scomposizione della flessione di un arco ricurvo

CONCLUSIONE

Ci sono motivi per pensare che queste pagine possano essere una fatica inutile per chi le ha scritte e per chi ha provato a leggerle. La conoscenza dei presupposti tecnici, con i quali un arco prende forma, è un dettaglio marginale che non aiuta a migliorare le prestazioni di un arciero. Potrebbe forse accendere l'interesse di un costruttore di archi, ma in questo campo ognuno tende a fare affidamento solo sulla propria esperienza pratica.

Per trovare comunque una giustificazione si potrebbe sostenere che senza un'interpretazione teorica dell'esperienza maturata sui fatti, non è possibile fare alcuna sperimentazione che porti a innovazioni che abbiano valore per originalità e per rilevanza. Ma, restando nello spirito con cui questo lavoro è stato fatto, può essere sufficiente dire che l'uso sportivo della testa, come l'uso sportivo delle braccia, non è mai inutile, e non fa male.



– per i criteri di calcolo qui utilizzati vedi:

www.outlab.it/doc/tiller.xls

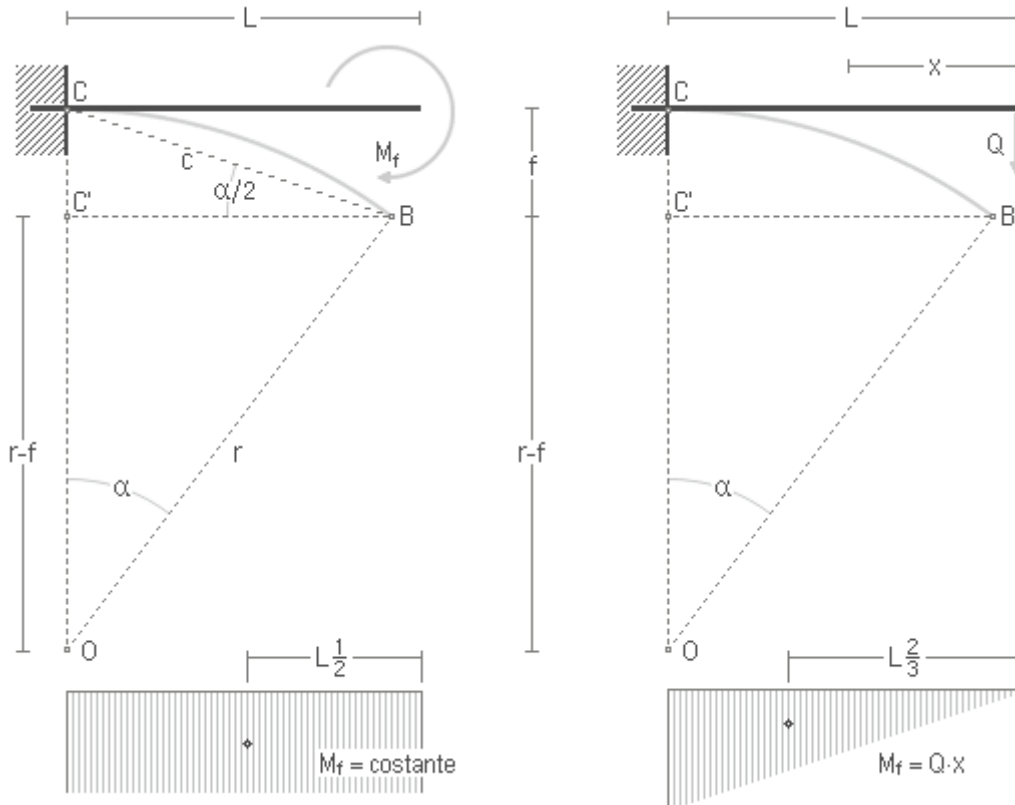
– per un prontuario sulla flessione vedi:

www.outlab.it/doc/ekip_1.xls

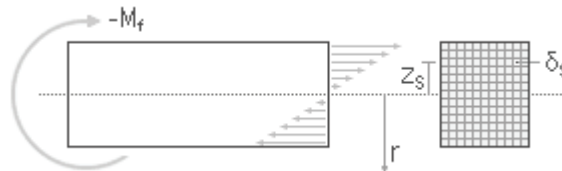
APPENDICE : Le equazioni della flessione

Il caso più semplice da prendere in esame è quello di una **mensola**, qui raffigurata secondo due situazioni diverse di carico:

- a sinistra, caricata con un momento flettente M_f che è costante e quindi la obbliga a flettersi con curvatura uniforme, seguendo un arco di cerchio che ha raggio r
- a destra, con un carico Q concentrato alla sua estremità, tale da generare lo stesso abbassamento f nonostante che la curvatura sia parabolica a causa del momento flettente che cresce con progressione lineare.



Affinché vi siano condizioni di equilibrio è necessario che il momento flettente che agisce sulla trave sia uguale e opposto al momento generato dalle tensioni indotte nel materiale.



Il **carico unitario** σ , presente in ogni elemento δ_s della sezione, dipende dal **raggio di curvatura** r con cui l'asta è flessa, dalla **distanza** z_s dall'asse neutro e da un **coefficiente di proporzionalità** E rappresentato dal **modulo elastico** del materiale:

$$\sigma = E \cdot z_s / r$$

Il momento flettente reattivo è definito dalla sommatoria degli elementi dell'area, introducendo il **momento d'inerzia** J secondo la definizione data dalla formula (4)

$$M_f = \sum \sigma \cdot \delta_s \cdot z_s = (E / r) \cdot \sum \delta_s \cdot z_s^2 \quad \text{e quindi} \quad r = E \cdot J / M_f \quad (15)$$

Momento flettente costante

Le relazioni esistenti tra i parametri L , c , r , f , α , possono essere così definite:

$$\begin{aligned} L &= \alpha \cdot r && \text{dove } \alpha \text{ è l'angolo misurato in radianti} \\ f &= r \cdot (1 - \cos \alpha) && \text{essendo } \underline{CC'} = \underline{OC} - \underline{OC'} \\ f &= c \cdot \sin(\alpha/2) && \text{essendo l'angolo } \underline{CBC'} \text{ uguale a } \alpha/2 \end{aligned}$$

Ne consegue, tenendo conto anche della formula (9), che

$$\begin{aligned} f / r &= 1 - \cos \alpha \\ f^2 / c^2 &= \sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha) / 2 \end{aligned}$$

e quindi

$$f = c^2 / (2r) \quad (16)$$

Accettando il **compromesso** di considerare $L \approx c$ e tenendo conto della formula (15) possiamo scrivere

$$f = L^2 / (2r) = M_f \cdot L^2 / (2E \cdot J) \quad (17)$$

Questa formula è quella che normalmente si trova sui manuali di meccanica. Va bene per calcolare una capriata o un traliccio dove gli angoli di flessione α sono molto piccoli. E va bene anche per calcolare lo spine di una freccia. Però deve essere rettificata quando si calcolano deformazioni più rilevanti, come quelle presenti nelle molle e, in particolare, negli archi di cui stiamo discutendo.

Carico concentrato all'estremità

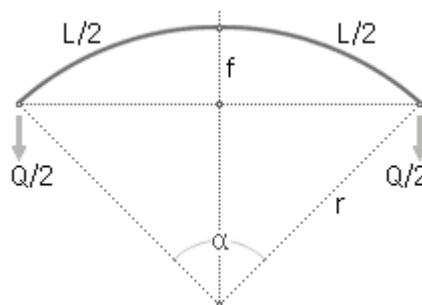
Il carico Q concentrato all'estremità, genera momenti $M=Q \cdot x$ che crescono progressivamente. Il diagramma di sollecitazione ha quindi una forma triangolare il cui baricentro è collocato a 2/3 della lunghezza della mensola. La formula per calcolare l'abbassamento f prende quindi una forma diversa:

$$f = L^2 / (2r) = Q \cdot L^3 / (3E \cdot J) \quad (18)$$

Queste variazioni nei coefficienti sono frequenti nelle formule della flessione. Occorre quindi molta attenzione quando si sceglie la formula che sia adatta per i vincoli e i carichi che stiamo esaminando. Ma si deve tenere conto anche del grado di precisione di cui abbiamo bisogno

Grado di precisione del compromesso

Il caso di un appoggio al centro e carico suddiviso sulle estremità – nella versione semplice che era stata data nella Fig.1 – equivale a duplicare specularmente lo schema della mensola.



Con il raddoppio di **L** e **Q** , la formula (18) diventa quindi uguale alla formula (1)

$$f = Q \cdot L^3 / (48E \cdot J)$$

mentre la formula (16), per il raddoppio di **L** , diventa

$$f = L^2 / (8r) \quad \text{e quindi} \quad (L / r) / (f / L) = 8 \quad (19)$$

Quest'ultima formula è interessante perché stabilisce che le due misure della curvatura – cioè quella dell'angolo espresso in radianti $\alpha=L/r$ e quella specifica dell'abbassamento f/L – sarebbero equivalenti essendo proporzionali tra loro. La realtà non è proprio così. Infatti la proporzionalità viene dal compromesso di considerare $L \approx c$ e vale solo se l'angolo di curvatura è sufficientemente piccolo. Per determinare che cosa si deve intendere per "piccolo" è opportuno fare un confronto con dati calcolati che siano calcolati senza espedienti.

L/r	f/L	L ² /rf	α
0,175	0,022	8,00	10°
0,209	0,026	8,01	12°
0,349	0,044	8,02	20°
0,698	0,086	8,08	40°
1,047	0,128	8,18	60°
1,396	0,168	8,33	80°
1,745	0,205	8,53	100°
2,094	0,239	8,77	120°

Vediamo, quindi, che fino a 12° (0,2 rad) l'errore è minore dell'uno per mille. Resta poi inferiore all'uno per cento fino a 40° (0,7 rad). Mentre, per angoli dell'ordine di 100° come sono quelli di un arco a trazione completa, l'errore è di circa il 10%.

Vedere altri documenti da: www.outlab.it